數字系統

A-1 數字系統簡介

我們的世界裡，所使用的數字系統是以十進位為主，也就是以10為基底，使用「0、1、2、3、4、5、6、7、8、9」等數字。而數位電腦的世界裡則是使用二進位，也就是以2為基底，使用「0」與「1」兩個數字。

除了十進位數字系統和二進位數字系統外，還有八進位數字系統和十六進位數字系統，如表A-1所列；表A-2列出了二進位、八進位、十進位、十六進位的對照關係。

▼ 表A-1 數字系統的組成符號與基底

數字系統	基底	組成符號	範例
二進位	2	0、1	$(101)_2$
八進位	8	0、1、2、3、4、5、6、7	$(567)_8$
十進位	10	0、1、2、3、4、5、6、7、8、9	$(5678)_{10}$
十六進位	16	0、1、2、3、4、5、6、7、8、9、A、B、C、D、E、F	$(567A)_{16}$

▼ 表A-2 數字系統對照表

十進位	二進位	八進位	十六進位
0	0000	0	0
1	0001	1	1
2	0010	2	2
3	0011	3	3
4	0100	4	4
5	0101	5	5
6	0110	6	6
7	0111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F

A-2 數字系統間的轉換

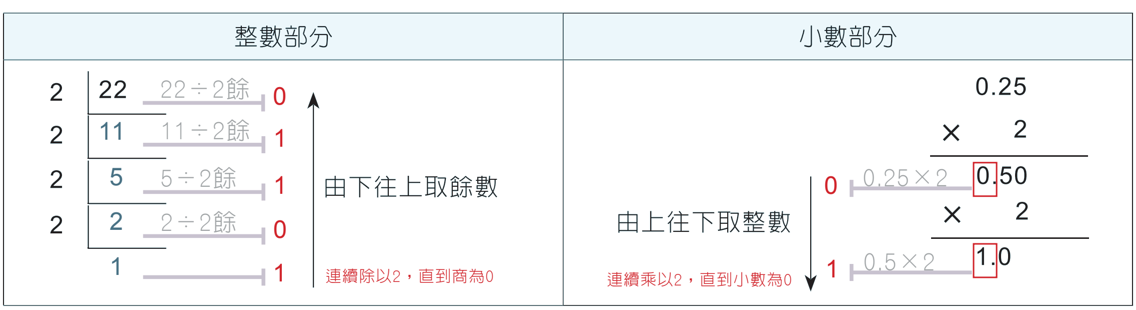
每個數字系統表示數值的方式不同，例如：十進位的數字22，在二進位中是以$(10110)_2$來表示，在八進位中是以$(26)_8$來表示，在十六進位中是以$(16)_{16}$來表示。不管表示的方法是哪個數字系統，它的值都是22。接著說明各種數字系統間該如何轉換。

❋ 十進位轉換為二進位、八進位、十六進位

要將十進位轉換爲二進位、八進位、十六進位時，可以依照以下方式進行轉換的動作。

- **整數部分**：將數字連續除以要轉換的基數，例如：要轉換爲二進位時，則除以2。再將一連串的餘數，由下往上、由左往右排列。
- **小數部分**：將小數連續乘以要轉換的基數，例如：要轉換爲二進位時，則乘以2。接著取其整數，再將一連串的整數，由上往下、由左往右排列。

十進位轉換為二進位$(22.25)_{10}=(10110.01)_2$



❋ 二進位、八進位、十六進位轉換為十進位

要將二進位、八進位、十六進位轉換爲十進位時，將每個數值乘以該基數的次方，而整數要乘以正的次方，小數則要乘以負的次方。

二進位轉換為十進位$(1011.01)_2=(11.25)_{10}$

1011.01_2

$=1\times2^3+0\times2^2+1\times2^1+1\times2^0+0\times2^{-1}+1\times2^{-2}$

$=8+0+2+1+0+0.25$

$=11.25_{10}$

八進位轉換為十進位$(413.6)_8=(267.75)_{10}$

413.6_8
$=4\times8^2+1\times8^1+3\times8^0+6\times8^{-1}$
$=256+8+3+0.75$
$=267.75_{10}$

十六進位轉換為十進位$(2D6.C)_{16}=(726.75)_{10}$

$2D6.C_{16}$
$=2\times16^2+D\times16^1+6\times16^0+C\times16^{-1}$
$=512+208+6+0.75$
$=726.75_{10}$

二進位與八進位的轉換

將二進位轉換爲八進位時，將整數部分「由右至左，每三個看成一組」，小數部分「由左至右，每三個看成一組」，當最後一組不夠三個時，則自行補0，接著再將每一組轉換爲八進位的位數即可。表A-3所列爲二進位與八進位對應表。

▼ 表A-3 二進位與八進位對應表

八進位	0	1	2	3	4	5	6	7
二進位	000	001	010	011	100	101	110	111

二進位轉換為八進位$(10011100100.01101)_2=(2344.32)_8$

二進位：	010	011	100	100	.	011	010
八進位：	2	3	4	4	.	3	2

結　果：$(10011100100.01101)_2=(2344.32)_8$

二進位與十六進位的轉換

將二進位轉換爲十六進位時，將整數部分「由右至左，每四個看成一組」，小數部分「由左至右，每四個看成一組」，當最後一組不夠四個時，則自行補0，接著再將每一組轉換爲十六進位的位數即可。表A-4所列爲二進位與十六進位對應表。

▼ 表A-4 二進位與十六進位對應表

二進位	十六進位	二進位	十六進位	二進位	十六進位
0000	0	0001	1	0010	2
0011	3	0100	4	0101	5
0110	6	0111	7	1000	8
1001	9	1010	A	1011	B
1100	C	1101	D	1110	E
1111	F				

二進位轉換為十六進位$(10011100100.01101)_2=(4E4.68)_{16}$

二進位：	0100	1110	0100	.	0110	1000
十六進位：	4	E	4	.	6	8

結　果：$(10011100100.01101)_2 = (4E4.68)_{16}$

A-3 二進位的四則運算

資料在電腦中是採行二進位數字系統，又是如何進行運算的呢？其實只要把持著「逢二進一」的原則，其運算方式與我們所熟悉的十進位運算作法是相同的。接下來看看這些二進位資料是如何進行運算的。

- 加法運算：只要將兩數所對應的位數，由右至左依序相加，若相加值大於等於基數，則產生進位值，加至左邊的位數。
- 減法運算：兩數相減時，由右至左將對應的位數依序相減。若遇被減數小於減數的情形(即0－1)，則向左邊位數借1，以增加一個基數的值(即增加2)，再與減數進行相減。

- **乘法運算**：兩個二進位數字相乘時，算法亦同十進位數相乘，由右至左依序將所對應的位數相乘即可。
- **除法運算**：兩個二進位數字相除時，由被除數最左邊取與除數相同的位數相除，若所取數比被除數小，則再多取一位相除。

兩數相加	兩數相減
1 1011.01 + 11.11 1111.00 1+1=2，將相加之和除以基數2，得進位值為1，餘數為0	0 1011.01 − 11.11 111.10 0小於1，故向左數借1基數值後相減，(0+基數2)−1，得差為1
兩數相乘	**兩數相除**
1010 × 11 1010 1010 11110	11 101) 1111 101 101 101 0

A-4 數值資料表示法

在數位電腦的世界裡，是以「0」與「1」的二進位數字系統來明白表示整數與小數數值，但對於負數的表示可就沒那麼簡單囉！為了讓電腦也能夠正確表示及分辨出負數數值，所以發展出下列幾個可以明確表示負數的數值表示法：

帶正負符號大小表示法

帶正負符號大小表示法是最簡單的數值表示法，此法是以最左邊的位元作為「符號位元」，用來表示數值為正數還是負數。若符號位元為「0」，則表示該數值為正數；若符號位元為「1」，則表示該數值為負數。

也就是說，當我們使用n個位元表示正負整數，最左邊的位元是符號位元，剩下的「n－1」個位元才是整數的數值大小，所能表示的正整數範圍為「$0\sim2^{n-1}-1$」，負整數範圍為「$0\sim-(2^{n-1}-1)$」。例如：使用8個位元來表示數值，則可以表示$-(2^7-1)\sim2^7-1$之間的整數數值。

但是此種數值表示法有個缺點，那就是同樣一個數字「0」，卻擁有「+0」以及「-0」兩個不同的表示法。另外，此法也無法以邏輯電路直接處理正數與負數間的運算，所以沒有被電腦所採用。

❋1補數表示法

補數(Complement)的觀念是指兩數相加的和等於某一特定值，則稱這兩個數值互為該特定值的補數。例如：4+6=10，則表示4的十補數為6，而6的十補數則為4。瞭解了補數的概念之後，接下來我們正式說明1補數表示法。

以1補數(1's Complement)表示法表示數值，同樣以最左邊的位元為「符號位元」，以「0」與「1」來表示正負數。此法用來表示正數的方式與帶正負符號大小表示法是一樣的；當要表示負數時，則必須先將「0轉換為1，1轉換為0」，轉換後所得到的二進位數值，才是正整數所對應的負整數。例如：以1補數表示法來表示+3為$(0011)_2$，-3則為$(1100)_2$。

但是1補數表示法有個缺點，那就是「0」的表示法同樣有兩種。以八位元為例，+0=$(00000000)_2$，-0=$(11111111)_2$，所以較少被電腦採用。

❋2補數表示法

以2補數(2's Complement)表示法來表示數值，最左邊位元同樣用來表示正負數，其正數的表示法和帶正負符號大小表示法、1的補數是一樣的。當要表示負數時，必須先將「0轉換為1，1轉換為0」，之後得到的二進位數值，再加上「1」，才是正整數所對應的負整數。例如：以2補數表示法來表示+3為$(0011)_2$，-3則為$(1100)_2+1=(1101)_2$。

而2補數表示法對於「0」的正負數表示法只有一種，以八位元為例，+0=$(00000000)_2$，而-0=$(11111111)_2+1=(00000000)_2$，所求得的數值是相同的。所以目前的電腦是採用2補數表示法來表示數值。