

數學講堂

第二講

高階綜合除法

講師：趙文煜

在課堂上所學的綜合除法(又稱為短除法)，除式皆為一次式；對於二次以上的除式，書上所教皆以國中所學的除法(又稱長除法)來解題。

現在，教導大家除式為二次以上的綜合除法，只要會一階的綜合除法，高階綜合除法的過程都是類似的，學起來必不會太困難，且第一講中的計算就可以運用了哦！希望可以對大家有用。

我們以一個國中就會算的題目來講解其計算過程：

題目：

將 $x^3 + x^2 - 2x + 2$ 除以 $x^2 + 2x - 1$ ，求其餘式與商式。

解法：

我們以分離係數的方法來表示，類似一階綜合除法的作法。

(1) 令除式 $x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -2x + 1$

將“=”右側的係數置於綜合除法右側，如下所示

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & +1 & -2 & +2 & \\ \hline & & & & -2 \\ & & & & 1 \end{array}$$

(2) 將第一數下放

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & +1 & -2 & +2 & \\ \hline \downarrow & & & & -2 \\ & & & & 1 \\ & & & & \\ & & & & \end{array}$$

(3) 將上數與右側兩數相乘所得數斜放，如下

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & +1 & -2 & +2 & \\ & -2 & & & -2 \\ & & +1 & & 1 \\ \hline 1 & & & & \end{array}$$

(4)將第 2 行加起來，置最下方

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & +1 & -2 & +2 & \\ & -2 & & & -2 \\ & \downarrow & & +1 & \\ \hline & 1 & -1 & & 1 \end{array}$$

(5)重複步驟(3)

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & +1 & -2 & +2 & \\ & -2 & +2 & & -2 \\ & & +1 & -1 & 1 \\ \hline & 1 & -1 & & \end{array}$$

(6)重複步驟(4)，第 3 行加起來，若第 3 列已寫到最後，則最後一行亦往下加，即完成

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & +1 & -2 & +2 & \\ & -2 & +2 & & -2 \\ & & +1 & -1 & 1 \\ \hline & 1 & -1 & +1 & \end{array}$$

(7)若第 3 列已寫到最後，則最後一行亦往下加，即完成。

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & +1 & -2 & +2 & \\ & -2 & +2 & & -2 \\ & & +1 & -1 & 1 \\ \hline 1 & -1 & +1 & +1 & \end{array}$$

所以，

商式 = $x-1$ ，餘式 = $x+1$ ，即所求。 ■

我們可以看出，其做法幾乎與一階綜合除法相同。再做一題，驗證一下你的想法是否正確。

題目：

將 $x^5 + 2x^4 - 3x^3 + x^2 + 10x - 21$ 除以 $x^2 - 2x + 3$ ，求其餘式與商式。

解法： $x^2 - 2x + 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 2x - 3$

$$\begin{array}{cccccc|c} 1 & +2 & -3 & +1 & +10 & -21 & \\ & +2 & +8 & +4 & -14 & & +2 \\ & & -3 & -12 & -6 & +21 & -3 \\ \hline 1 & +4 & +2 & -7 & -10 & +0 & \end{array}$$

所以商式為 $x^3 + 4x^2 + 2x - 7$ ，餘式為 $-10x$ 。 ■

另外，在一階綜合除法中提及除法的領導係數若非為 1，則計算後商式需除以 2，方能得真實的商式。在高階綜合除法亦有相同的作法。

題目：

將 $2x^5 + 5x^4 + 3x^3 + 8x^2 - 3x + 1$ 除以 $2x^3 - x^2 + 4x - 2$ ，求其餘式與商式。

解法：

$$2x^3 - x^2 + 4x - 2 = 0 \Rightarrow x^3 = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$$

按上兩題做法，可得下列算式

$$\begin{array}{r|l}
 2 & +5 & +3 & +8 & -3 & +1 & \\
 & +1 & +3 & +1 & & & +\frac{1}{2} \\
 & & -4 & -12 & -4 & & -2 \\
 & & & +2 & +6 & +2 & +1 \\
 \hline
 2 & +6 & +2 & -1 & -1 & +3 &
 \end{array}$$

若按上兩題的解法，餘式為 $-x^2 - x + 3$ ，而商式為 $2x^2 + 6x + 2$ 。

但是，此商式的答案是錯的(稱為**假商式**)，以國中的長除法計算，正確的商式應為 $x^2 + 3x + 1$ (**真商式**)，正好為上列所得**假商式**的一半。所以需再多一步驟

$$\begin{array}{r|l}
 2 & +5 & +3 & +8 & -3 & +1 & \\
 & +1 & +3 & +1 & & & +\frac{1}{2} \\
 & & -4 & -12 & -4 & & -2 \\
 & & & +2 & +6 & +2 & +1 \\
 \hline
 2 & 2 & +6 & +2 & -1 & -1 & +3 \\
 1 & +3 & +1 & & & &
 \end{array}$$

主要原因乃綜合除法所做除式，領導係數必為 1，故上列算式其真正運算為求

$2x^5 + 5x^4 + 3x^3 + 8x^2 - 3x + 1$ 除以 $x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$ 之餘式與商式。

其除式為真正欲做除式的一半，則被除式少除一半，商式將成 2 倍。原理如下式：

$$\begin{aligned}
 f(x) &= g(x)Q(x) + r(x) \\
 &= \left(\frac{1}{2}g(x)\right) \times (2Q(x)) + r(x) \circ
 \end{aligned}$$