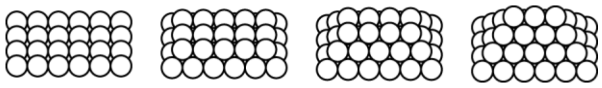
數學 第一章 考試卷　年　班　座號：　　姓名：

一、單一選擇題

1. (　)已知一等差數列共有十項，且知其奇數項之和為 15，偶數項之和為 30，則下列哪一選項為此數列之公差？（A）1（B）2（C）3（D）4（E）5。

2. (　)若 $\sum_{k=1}^{8} a_k = 5$，$\sum_{k=1}^{11} b_k = 12$，又 $a_9 = 7$，$a_{10} = -3$，$b_{11} = 4$，則 $\sum_{k=1}^{10}(2a_k - 3b_k + 4)$ 之值為何？（A）32（B）34（C）36（D）38（E）40。

3. (　)下圖表示長方形垛的疊法：某水果販將橘子堆成長方形垛。若最底層長邊有 10 個橘子，短邊有 5 個，則此長方形垛最多有幾個橘子？



（A）110（B）120（C）130（D）140（E）150。

二、多重選擇題

1. (　)一機器狗每秒鐘前進或者後退一步，程式設計師讓機器狗以前進 3 步，然後再後退 2 步的規律移動。如果將此機器狗放在數線的原點，面向正的方向，以 1 步的距離為 1 單位長。令 $P(n)$ 表示第 n 秒時機器狗所在位置的坐標，且 $P(0) = 0$。那麼下列選項何者為真？（A）$P(3) = 3$（B）$P(5) = 1$（C）$P(10) = 2$（D）$P(101) = 21$（E）$P(103) < P(104)$。

2. (　)下列何者正確？（A）設〈a_n〉，〈b_n〉為二等差數列，令 $c_n = a_n + b_n$，則〈c_n〉也為等差數列（B）設〈a_n〉，〈b_n〉為二等比數列，令 $c_n = a_n \times b_n$，則〈c_n〉也為等比數列（C）設一數列〈a_n〉，其第 n 項 $a_n = 3n + 2$，$n \in N$，則〈a_n〉為等差數列（D）設一數列〈a_n〉，其前 n 項總和 $S_n = n^2 + 3n$，$n \in N$，則〈a_n〉為等比數列（E）設〈a_n〉為一等比數列，則 a_3，a_6，a_9，a_{12}，……亦為一等比數列。【基隆女中】

3. (　)關於正整數 $N = \sum_{k=1}^{15} k^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots\cdots + 15^3$，則下列選項何者正確？（A）$N = \sum_{k=1}^{15} k^2 \times \sum_{k=1}^{15} k$（B）$N = \sum_{k=1}^{16}(k-1)^3$（C）$N$ 是一個完全平方數（D）$N = (1 + 2 + \cdots\cdots + 15)^2$（E）$N$ 是 35 的倍數。【明倫高中】

4. (　)一等差數列的第 11 項為 19，第 20 項為 -26，下列何者是正確的？（A）首項為 69（B）公差為 -5（C）首 n 項和最大時，n 為 14（D）首 n 項和 S_n 為負時，S_n 的最大值為 -29（E）首 20 項之各項絕對值之和為 592。【高雄中學】

三、填充題

1. 等比級數 $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots\cdots + \frac{1}{2^n}$，$n$ 為正整數，欲使 $|1 - S_n| < 0.001$，則 n 之最小值為【　　　】。

2. 於 10 與 x 中插入 10 個等差中項，且自首項算起第 6 項為 -5，則 $x =$【　　　】。

3. 兩等差數列〈a_n〉：1，4，7，……，1000；〈b_m〉：11，21，31，……，1001，將這兩個等差數列的共同數字依序排列，形成一新數列〈c_k〉，則數列〈c_k〉各項之和為【　　　】。

4. 等差數列 -3，x_1，x_2，x_3，……，x_{99}，7 中，$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots\cdots + x_{99} =$【　　　】。【宜蘭高中】

5. 一等比級數之公比 r，首項 a_1，前 n 項的和為 48，前 $2n$ 項的和為 60，則前 $3n$ 項的和為【　　　】。

6. 試求級數 $9 + 99 + 999 + \cdots\cdots$ 加至第 n 項的和為【　　　】。

7. 設 a，b，c 三數成等比數列，若其和 28，平方和 336，求此三數為【　　　】。

8. 求下列級數的和：

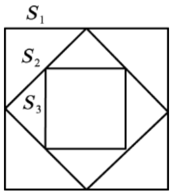
（1）$1\times1 + 3\times4 + 5\times9 + 7\times16 + 9\times25 + \cdots + 19\times100 =$【　　】

（2）$1^2 + 4^2 + 7^2 + \cdots + 31^2 =$【　　　】

（3）$\frac{1}{1\times4} + \frac{1}{2\times5} + \frac{1}{3\times6} + \cdots + \frac{1}{n(n+3)} =$【　　　】

四、 計算題

1. 已知正方形 S_1 的邊長為 2，連接 S_1 四邊的中點得正方形 S_2，依此規律得一系列正方形 S_3，S_4，…，如圖。設 a_n 表示 S_n 的面積，則：



(1)寫出數列〈 a_n 〉的遞迴式。
(2)試求 a_n。
解：

2. 小瑨在水果攤打工，把橘子堆成金字塔形：底盤是正方形，每四個橘子的空隙上方再放一個橘子，如圖。

設 a_n 表示疊了 n 層所需的橘子數，則：
(1)寫出數列〈 a_n 〉的遞迴式。
(2)若要疊七層，需要多少個橘子？
解：

3. 數列〈 a_n 〉滿足 $a_1=1$，$a_n=2a_{n-1}+1$，$n\geqq 2$，則：
(1)求出 a_2，a_3，a_4。
(2)試求出〈 a_n 〉一般項之通式（以 n 表示之）。
解：[提示] 令 $a_n-\alpha=r(a_{n-1}-\alpha)$

五、 證明題(每題 10 分)

1. 試證明：$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$。
證明：

2. 試證：對任意自然數 n，$n(n^2+5)$ 恆可被 6 整除。
【嘉義女中】
證明：

一、單一選擇題

1.（C）

解析：設等差數列之首項 a_1，公差 d，則

奇數項和 $=a_1+a_3+\cdots+a_9=\dfrac{5(a_1+a_9)}{2}=$

$\dfrac{5[a_1+(a_1+8d)]}{2}=5(a_1+4d)=15$

偶數項和 $=a_2+a_4+\cdots+a_{10}=\dfrac{5(a_2+a_{10})}{2}=$

$\dfrac{5[(a_1+d)+(a_1+9d)]}{2}=5(a_1+5_d)=30$

解 $\begin{cases}a_1+4d=3\\a_1+5d=6\end{cases}$ 得 $d=3$

故選（C）

2.（B）

解析：$\because \sum\limits_{k=1}^{10}a_k=\sum\limits_{k=1}^{8}a_k+a_9+a_{10}=5+7+(-3)=9$，

$\sum\limits_{k=1}^{10}b_k=\sum\limits_{k=1}^{11}b_k-b_{11}=12-4=8$

$\therefore \sum\limits_{k=1}^{10}(2a_k-3b_k+4)=2\sum\limits_{k=1}^{10}a_k-3\sum\limits_{k=1}^{10}b_k+\sum\limits_{k=1}^{10}4$

$=2\times9-3\times8+4\times10$

$=34$

故選（B）

3.（C）

解析：因為長方形堆垛每一層每一邊的橘子數比下一層每一邊的橘子數少一個

所以橘子數 $=10\times5+9\times4+8\times3+7\times2+6\times1=130$

故選（C）

二、多重選擇題

1.（A）（B）（C）（D）

解析：機器狗的行進方式以每 5 秒鐘前進 1 步

其所在位置的坐標為 <u>1，2，3，2，1</u>，<u>2，3，4，3，2</u>，……

（A）$P(3)=3$

（B）$P(5)=1$

（C）$P(10)=\dfrac{10}{5}\times1=2$

（D）$P(101)=\dfrac{100}{5}\times1+1=21$

（E）$P(103)=23$，$P(104)=23-1=22\Rightarrow P(103)>P(104)$

故選（A）（B）（C）（D）

2.（A）（B）（C）（E）

解析：（A）○：$c_{n+1}-c_n=(a_{n+1}+b_{n+1})-(a_n+b_n)=(a_{n+1}-a_n)+(b_{n+1}-b_n)=d_1+d_2$ 為定值

（B）○：$\dfrac{c_{n+1}}{c_n}=\dfrac{a_{n+1}b_{n+1}}{a_nb_n}=\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)\left(\dfrac{b_{n+1}}{b_n}\right)=r_1r_2$ 為定值

（C）○：$a_{n+1}-a_n=[3(n+1)+2]-(3n+2)=3$ 為定值

（D）╳：$n=1$ 時，$a_1=S_1=1+3=4$，$n\geqq2$ 時，$a_n=S_n-S_{n-1}=(n^2+3n)-[(n-1)^2+3(n-1)]=2n+2$

$\Rightarrow\langle a_n\rangle$ 為等差數列非等比數列

（E）○：$\dfrac{a_{n+3}}{a_n}=\dfrac{a_1r^{n+2}}{a_1r^{n-1}}=r^3$ 為定值

故選（A）（B）（C）（E）

3.（B）（C）（D）

解析：（1）$N=\sum\limits_{k=1}^{15}k^3=\left(\dfrac{15\times16}{2}\right)^2=120^2=14400$

因此（C）（D）皆正確，而（E）錯誤

（2）（A）之 $\sum\limits_{k=1}^{15}k^2\times\sum\limits_{k=1}^{15}k=\dfrac{15\times16\times31}{6}\times\dfrac{15\times16}{2}\neq N$

（B）之 $\sum\limits_{k=1}^{16}(k-1)^3=0^3+1^3+2^3+\cdots\cdots+15^3=N$

故選（B）（C）（D）

4.全

解析：（A）（B）設首項為 a，公差為 d，得 $\begin{cases}a+10d=19\\a+19d=-26\end{cases}$

$\Rightarrow a=69$，$d=-5$

（C）首 n 項和最大 $\Rightarrow a_n\geqq0$ 且 $a_{n+1}<0$ 所以 $69+(n-1)(-5)\geqq0\Rightarrow n\leqq14.8$

故前 14 項和最大

（D）$S_n=\dfrac{n[2\times69+(n-1)(-5)]}{2}=\dfrac{-5n^2+143n}{2}<0$

$\Rightarrow 5n^2-143n>0\Rightarrow n\geqq29$

所以 $S_{29}=\dfrac{-5\times29^2+143\times29}{2}=\dfrac{-4205+4147}{2}=-29$

（E）$a_{15}=69+14(-5)=-1$，$a_{20}=69+19(-5)=-26$

$\Rightarrow\sum\limits_{k=1}^{20}|a_k|=\sum\limits_{k=1}^{14}|a_k|+\left(-\sum\limits_{k=15}^{20}a_k\right)=$

$\dfrac{14[2\times69+13\times(-5)]}{2}-\dfrac{[(-1)+(-26)]\times6}{2}=$

$511-(-81)=592$

故選（A）（B）（C）（D）（E）

三、填充題

1.10

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$|1-S_n|<0.001\Rightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^n<\frac{1}{1000}\Rightarrow 2^n>1000$，因 $n\in N$，故 n 之最小值為 10

2.-23

解析：$a_6=-5\Rightarrow 10+5d=-5\Rightarrow d=-3$

所求 $x=a_{12}=10+11\times(-3)=-23$

3.16863

解析：兩等差數列的第一個共同項為 31，公差各為 3 及 10，其最小公倍數 30

兩數列的共同項形成首項 31，公差 30 的等差數列

因此 $c_{k+1}=31+30k$，由 $c_{k+1}=31+30k<1000$ 得 $k\leqq 32$，共 33 項

數列 $\langle c_k\rangle$ 各項之和為 $\frac{33(2\times31+32\times30)}{2}=16863$

4.198

解析：設 $x_1=-3+d$，$x_{99}=7-d$，則

$x_1+x_2+\cdots\cdots+x_{99}=\frac{99(-3+d+7-d)}{2}=198$

5. 63；

解析：〔解法一〕

$S_n=\frac{a_1(1-r^n)}{1-r}=48$ ……………①

$S_{2n}=\frac{a_1(1-r^{2n})}{1-r}=60$ ……………②

$\frac{①}{②}$ 得 $\frac{1-r^n}{(1-r^n)(1+r^n)}=\frac{48}{60}\Rightarrow\frac{1}{1+r^n}=\frac{4}{5}\Rightarrow r^n=\frac{1}{4}$ 代入①得 $\frac{a_1}{1-r}=64$

$\therefore S_{3n}=\frac{a_1(1-r^{3n})}{1-r}=64\left(1-\frac{1}{64}\right)=63$

〔解法二〕

設 $S_{3n}=x$，則 48，$60-48$，$x-60$ 成等比數列

$\therefore 12^2=48(x-60)\Rightarrow 144=48(x-60)\Rightarrow x=63$

6 $\frac{10}{9}(10^n-1)-n$

令 $S=9+99+999+\cdots\cdots+\underbrace{999\cdots\cdots9}_{n\text{個}9}$

$=(10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+\cdots\cdots+(10^n-1)$

$=(10+10^2+\cdots\cdots+10^n)-n$

$=\frac{10(10^n-1)}{10-1}-n=\frac{10}{9}(10^n-1)-n$

7 .4，8，16 或 16，8，4

解析：設公比為 r，則 $b=ar$，$c=ar^2$

$$\begin{cases}a+ar+ar^2=28\\ a^2+a^2r^2+a^2r^4=336\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}a(1+r+r^2)=28 \cdots\cdots\cdots\cdots① \\ a^2(1+r^2+r^4)=336\cdots\cdots\cdots\cdots②\end{cases}$$

$\frac{②}{①}\Rightarrow\frac{a^2(1+r^2+r^4)}{a(1+r+r^2)}=\frac{336}{28}\Rightarrow a(1-r+r^2)=12$ ……………③

$\frac{①}{③}\Rightarrow\frac{a(1+r+r^2)}{a(1-r+r^2)}=\frac{28}{12}\Rightarrow\frac{1+r+r^2}{1-r+r^2}=\frac{7}{3}\Rightarrow 4r^2-10r+4=0$

可解得 $r=2$，$\frac{1}{2}$

當 $r=2$ 時，代入①得 $a=4$，三數為 4，8，16

當 $r=\frac{1}{2}$ 時，代入①得 $a=16$，三數為 16，8，4

8.（1）$\sum_{k=1}^{10}(2k^3-k^2)$，5665；（2）$\sum_{k=1}^{11}(9k^2-12k+4)$，3806；

（3）$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+3)}$，$\frac{11}{18}-\frac{3n^2+12n+11}{3(n+1)(n+2)(n+3)}$

解析：（1）$1\times1+3\times4+5\times9+7\times16+9\times25+\cdots+19\times100$

$=\sum_{k=1}^{10}(2k-1)\times k^2=\sum_{k=1}^{10}(2k^3-k^2)=2\sum_{k=1}^{10}k^3-\sum_{k=1}^{10}k^2$

$=2\times\frac{10^2\times11^2}{4}-\frac{10\times11\times21}{6}=5665$

（2）$1^2+4^2+7^2+\cdots+31^2=\sum_{k=1}^{11}(1+(k-1)\times3)^2=\sum_{k=1}^{11}(3k-2)^2=\sum_{k=1}^{11}(9k^2-12k+4)=\sum_{k=1}^{11}9k^2-\sum_{k=1}^{11}12k+\sum_{k=1}^{11}4$

$=9\times\frac{11\times12\times23}{6}-12\times\frac{11\times12}{2}+4\times11=3806$

（3）$\frac{1}{1\times4}+\frac{1}{2\times5}+\frac{1}{3\times6}+\cdots+\frac{1}{n(n+3)}$

$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+3)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+3}\right)=\frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+3}\right)$

$=\frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}\right)\right)$

$=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}\right)\right)$

$=\frac{11}{18}-\frac{3n^2+12n+11}{3(n+1)(n+2)(n+3)}$

四、計算題

1.(1)$\begin{cases} a_1=4 \\ a_n=\frac{1}{2}a_{n-1}, n\geqq 2 \end{cases}$;(2)$a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$

解析:(1)根據觀察,正方形 S_n 的邊長是正方形 S_{n-1} 的 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 倍,面積是 $\frac{1}{2}$ 倍,所以 $a_n=\frac{1}{2}a_{n-1}$,$n\geqq 2$

而 S_1 的面積為 $a_1=2^2=4$,因此,數列〈a_n〉的遞迴式為 $\begin{cases} a_1=4 \\ a_n=\frac{1}{2}a_{n-1}, n\geqq 2 \end{cases}$

(2)〈a_n〉是首項為 4,公比為 $\frac{1}{2}$ 的等比數列,故一般項 $a_n=4\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$

2.(1)$\begin{cases} a_1=1 \\ a_n=a_{n-1}+n^2, n\geqq 2 \end{cases}$;(2)不夠

解析:(1)$a_1=1$。觀察圖形得知:疊兩層可視為一層加上個 2×2 的"底"而成;疊三層可視為兩層加上一個 3×3 的"底"而成,如圖

同理,疊 n 層可視為 $n-1$ 層加上一個 $n\times n$ 的"底"而成

因此,$a_n=a_{n-1}+n^2$

故數列〈a_n〉的遞迴式為 $\begin{cases} a_1=1 \\ a_n=a_{n-1}+n^2, n\geqq 2 \end{cases}$

(2)由遞迴式可逐項求出

$a_2=a_1+2^2=1+4=5$,$a_3=a_2+3^2=14$,

$a_4=a_3+4^2=30$,$a_5=a_4+5^2=55$,

$a_6=a_5+6^2=91$,$a_7=a_6+7^2=140$

故需要 140 個橘子才能疊到七層

3.(1)$a_2=3$,$a_3=7$,$a_4=15$;(2)$a_n=2^n-1$;

解析:(1)$a_2=2\times a_1+1=2\times1+1=3$,

$a_3=2\times a_2+1=2\times3+1=7$,

$a_4=2\times a_3+1=2\times7+1=15$

(2)方法一

令$a_n-\alpha=2(a_{n-1}-\alpha)$

$a_n=2a_{n-1}-\alpha \Rightarrow \alpha=-1$

$\Rightarrow a_n+1=2(a_{n-1}+1)$

令$b_n=a_n+1$所以$b_{n-1}=a_{n-1}+1$ 且 $b_1=a_1+1=2$

$b_n=b_1\times2^{n-1}=2\times2^{n-1}=2^n$

$\Rightarrow a_n+1=2^n \Rightarrow a_n=2^n-1$

(2)方法二

由(1)可推測 $a_n=2^n-1$

(證明)①當 $n=1$ 時,$a_1=2^1-1=1$,推測成立

②設 $n=k$ 時,$a_k=2^k-1$ 推測成立

則 $n=k+1$ 時,

$a_{k+1}=2\cdot a_k+1=2(2^k-1)+1=2^{k+1}-1$ 推測亦成立

故由數學歸納法可知,對任意正整數 n,$a_n=2^n-1$ 恆成立

五、證明題

1.(證明)

(1)當 $n=1$ 時,$1^2=\frac{1\times(2\times1-1)(2\times1+1)}{3}$,命題成立

(2)設 $n=k$ 時命題成立,即

$$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2k-1)^2=\frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}$$

則 $n=k+1$ 時

$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2k-1)^2+(2(k+1)-1)^2=\frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}+(2k+1)^2$

$=(2k+1)\left(\frac{k(2k-1)}{3}+(2k+1)\right)=(2k+1)\cdot\frac{2k^2+5k+3}{3}$

$=\frac{(k+1)(2k+1)(2k+3)}{3}=\frac{(k+1)(2(k+1)-1)(2(k+1)+1)}{3}$

故由數學歸納法可知,原命題對所有正整數 n 均成立

2.(證明)

(1)當 $n=1$ 時,

$1\cdot(1^2+5)=6$ 能被 6 整除,原命題成立

(2)設 $n=k$ 時,原命題成立,即

$k(k^2+5)=6t$,其中 t 為自然數

當 $n=k+1$ 時,

$(k+1)[(k+1)^2+5]=(k+1)(k^2+5+2k+1)$

$=k(k^2+5)+2k^2+k+k^2+2k+6$

$=k(k^2+5)+3k(k+1)+6$

因 $k(k+1)$ 必為偶數,可令 $k(k+1)=2s$,其中 s 為自然數

$\Rightarrow k(k^2+5)+3k(k+1)+6$

$=6t+3\times2s+6=6(t+s+1)$ 能被 6 整除,命題亦成立

由數學歸納法得證,對任意自然數 n,原命題恆成立